Grundpraktikum

O2: Mikroskop

Autor:
[redacted]

Partner:
[redacted]

Versuchsdatum: [redacted]
Versuchsplatz: [redacted]
Abgabedatum: [redacted]

Inhaltsverzeichnis

1 Physikalische Grundlagen und Aufgabenstellung

Im Versuch O2: Mikroskop soll mit Hilfe verschiedener Kombinationen von zwei Objektiven und zwei Okularen in einem Mikroskop die Dicke zweier Drähte vermessen werden. Dazu werden die verwendeten Skalen geeicht und der Vergrößerungsfaktor für die Okular-Objektiv-Kombinationen berechnet. Zusätzlich soll auch der Öffnungswinkel des verwendeten Gerätes für beide Objektive gemessen und damit die theoretischen Auflösungsgrenzen bestimmt werden. Die vollständige Versuchsbeschreibung sowie die physikalischen Grundlagen befinden sich in [2, S. 51-55] und soll hier deswegen nicht wiederholt werden.

2 Bestimmung des Vergrößerungsfaktors

Im ersten Teil des Versuches wurde der Vergrößerungsfaktor

$$M = \frac{B}{G} \tag{1}$$

für alle Kombinationen der zwei Objektive und zwei Okulare bestimmt. Dabei wurden die in Tabelle 1 beschriebenen optischen Instrumente verwendet.

Tabelle 1: Verwendete optische Instrumente

	Objektiv 1	Objektiv 2
Abbildungsmaßstab	10x	40x
Numerische Apertur	0,25	0,65
Tubuslänge	160 mm	160 mm
	Okular A	**Okular B**
Vergrößerung	10x	16x
Sehfeldzahl	14,0	12,5

Gemäß dem Versuchsaufbau im Skript wurde B mit Hilfe eines Winkelspiegels auf einem in $s_0 = (250 \pm 5)\ mm$ entfernt aufgestellten Lineal abgelesen. Der statistische Fehler $e_{B,z}$ wurde je nach verwendeter Kombination von Objektiv und Okular mit $2\ mm$ bzw. $3\ mm$ (nur in der Kombination Objektiv 2 und Okular B) abgeschätzt: neben dem üblichen Ablesefehler von $0,5\ mm$ (halber Skalenteil) muss hier nämlich auch die schlechtere Ablesbarkeit aufgrund der verwendeten Spiegelkonstruktion sowie die Dicke der Skalenstriche der Objektskala, deren Zentrum nur geschätzt werden konnte, beachtet werden.

Der systematische Fehler $e_{B,s}$ ergibt sich einerseits aus der Unsicherheit der Skaleneinteilung, die für das Lineal mit $u_L = 200\ \mu m + B \cdot 10^{-3}$ angenommen wurde. Andererseits muss auch beachtet werden, dass s_0 eine gewisse Unsicherheit besitzt, die hier mit $u_{s_0} = 5\ mm$ abgeschätzt wurde. Geometrisch ist leicht ersichtlich, dass gilt

$$B = \tan\epsilon \cdot s_0 \tag{2}$$

wenn B das betrachtete Bild, s_0 der Abstand vom Auge zum Bild und ϵ den in dieser Versuchsanordnung festen Sehwinkel über den Winkelspiegel bezeichnen. Dann gilt nach der Fehlerfortpflanzung

$$u_B \propto \tan\epsilon \cdot u_{s_0} = \frac{B}{s_0} \cdot u_{s_0} \tag{3}$$

Nun werden die beiden systematischen Fehler, da sie unkorreliert sind, pythagoräisch addiert:

$$e_{B,z} = \sqrt{(u_L)^2 + \left(\frac{B}{s_0} \cdot u_{s_0}\right)^2} \tag{4}$$

Um den Gesamtfehler für B zu erhalten wird nun wieder pythagoräisch addiert, also

$$u_B = \sqrt{e_{B,z}^2 + e_{B,s}^2} \tag{5}$$

Die Messung von G fand direkt durch Ablesen der Skalenteile im Mikroskop statt. Zuerst wurden zwei Skalenstriche von G ausgewählt, in der mit Hilfe des Winkelspiegels übereinandergelegten Darstellung konnten dann die dazwischen liegenden Skalenteile von B ausgezählt werden. Aufgrund dieser Methodik ist der Wert von G in Skalenteilen, hier g genannt, fehlerfrei. Auf der Objektskale gilt

$$\delta = 1\ Skalenteil \mathrel{\widehat{=}} 0,05\ mm$$

Bei der Umrechnung muss folglich die systematische Unsicherheit der Objektskale beachtet werden, die mit $u_\delta = 0,005\ mm + L \cdot 10^{-5}$, also dem Fehler einer Bügelmessschraube, abgeschätzt wurde. Damit wird die Unsicherheit überschätzt, da eine Bügelmessschraube natürlich noch weitere Fehlerquellen neben der Skalenunsicherheit besitzt, liegt aber in der korrekten Größenordnung. Es folgt

$$G = g \cdot 0,05\ mm \tag{6}$$

$$u_G = 0,005\ mm + G \cdot 10^{-5} \tag{7}$$

Damit lässt sich die Unsicherheit der Vergrößerung M berechnen als

$$u_M = \sqrt{\left(\frac{u_B}{G}\right)^2 + \left(-\frac{B}{G^2} \cdot u_G\right)^2} \tag{8}$$

Schließlich folgen die Vergrößerungsfaktoren M für die verschiedenen Kombinationen aus Objektiv und Okular mit den in Tabelle 2 im Anhang angegebenen Werten:

	Okular A	Okular B
Objektiv 1	$M_{A1} = 107 \pm 5$	$M_{B1} = 167 \pm 8$
Objektiv 2	$M_{A2} = 410 \pm 30$	$M_{B2} = 670 \pm 47$

3 Eichung der Okularskale

Im nächsten Schritt des Versuchs wurde die Skale von Okular B geeicht. Hierzu wurde ein bestimmter Abstand von g Skalenteilen auf der Objektskale mit Hilfe der Skala auf dem Okularmikrometer ausgezählt. Die Anzahl der abgelesenen Okularskalenteile wurde als l bezeichnet. Da die Breite δ eines Skalenteils auf der Objektskale bekannt ist, kann damit auch die Breite Δ eines Skalenteils auf der Okularskale bestimmt werden.

Entsprechend der obigen Argumentation zur Fehlerfreiheit von g folgt auch hier die Fehlerfreiheit von g. G und u_G berechnen sich ebenfalls wie oben angegeben.

Das Ablesen von l auf der Okularskale war fehlerbehaftet: neben der üblichen Unsicherheit von einem halben Skalenteil kam bei Objektiv 2 noch die Strichdicke der Objektskala hinzu, die es nötig machte, die Mitte des Striches abzuschätzen. Damit folgt $u_l = 0,5$ für Objektiv 1 bzw. $u_l = 1$ für Objektiv 2.

Die Breite der Okularskalenteile Δ_i für die Objektive 1 und 2 und ihre Unsicherheit errechnen sich dann einfach wie folgt

$$\Delta_i = 1\ Skalenteil = \frac{G}{l} \tag{9}$$

$$u_{\Delta_i} = \sqrt{\left(\frac{u_G}{l}\right)^2 + \left(-\frac{G}{l^2} \cdot u_l\right)^2} \tag{10}$$

Für die verwendeten Objektive $i = 1, 2$ ergibt sich dann mit den Werten aus Tabelle 3 im Anhang für die Breite eines Okularskalenteils

$$\Delta_1 = (10,13 \pm 0,09)\ \mu m$$
$$\Delta_2 = (2,48 \pm 0,06)\ \mu m$$

4 Bestimmung der Dicke von zwei Drähten

Mit Hilfe der im vorigen Schritt bestimmten Δ_i konnte nun die Dicke von zwei Drähten gemessen werden.

Mit Objektiv 1 wurden für den ersten Draht $l_{11} = 3$ und für den zweiten Draht $l_{12} = 8$ Skalenteile auf der Okularskale gemessen, wobei ein Skalenteil nun eine Länge von Δ_1 repräsentierte. Der Ablesefehler $u_{l_{1i}}$ wurde auf einen Skalenteil abgeschätzt, da zwei Mal abgelesen werden musste. Für die Dicke der Drähte d_{1i} folgt also:

$$d_{1i} = l_{1i} \cdot \Delta_1 \tag{11}$$
$$u_{d_{1i}} = \sqrt{\left(l_{1i} \cdot u_{\Delta_1}\right)^2 + \left(\Delta_1 \cdot u_{l_{1i}}\right)^2} \tag{12}$$

Mit Objektiv 2 wurden für den ersten Draht $l_{21} = 13$ Skalenteile auf der Okularskale gemessen, auf der ein Skalenteil nun eine Länge von Δ_2 repräsentierte. Der Ablesefehler $u_{l_{21}}$ wurde wieder auf einen Skalenteil abgeschätzt. Für die Dicke des ersten Drahtes d_{21} folgt also analog zu oben:

$$d_{21} = l_{21} \cdot \Delta_2 \tag{13}$$
$$u_{d_{21}} = \sqrt{\left(l_{21} \cdot u_{\Delta_2}\right)^2 + \left(\Delta_2 \cdot u_{l_{21}}\right)^2} \tag{14}$$

Im Falle des zweiten Drahtes waren mit Objektiv 2 (und nur hier) signifikante Schwankungen der Dicke zu beobachten. Deswegen wurde l_{22} sechs Mal gemessen, um eine statistische Betrachtung zu ermöglichen. Nach jeder Einzelmessung wurde der Draht auf dem Objekttisch verrückt und neu im Blickfeld des Mikroskops zentriert.

Von allen gemessenen Werten l_{22} wurde der Mittelwert $\overline{l_{22}}$ gebildet. Der statistische Fehler $e_{\overline{l_{22}},z}$ ist dann gleich dem Vertrauensbereich, also der Standardabweichung aller Messwerte geteilt durch die Quadratwurzel ihrer Anzahl $n = 6$:

$$e_{\overline{l_{22}},z} = \sqrt{\frac{\sum \left(l_{22} - \overline{l_{22}}\right)^2}{n\ (n-1)}} \tag{15}$$

Der systematische Restfehler $e_{\overline{l_{22}},s}$ entspricht der Unsicherheit der Objektskale multipliziert mit dem Mittelwert der abgelesenen Skalenteile $\overline{l_{22}}$:

$$e_{\overline{l_{22}},s} = \sqrt{\left(\overline{l_{22}} \cdot u_{\Delta_2}\right)^2} \tag{16}$$

Für die mit dem zweiten Objektiv gemessene Drahtdicke d_{22} und ihren Fehler $u_{d_{22}}$ folgt dann

$$d_{22} = \overline{l_{22}} \cdot \Delta_2 \tag{17}$$
$$u_{d_{22}} = \sqrt{\left(e_{\overline{l_{22}},s} \cdot \Delta_2\right)^2 + \left(e_{\overline{l_{22}},z} \cdot \Delta_2\right)^2} \tag{18}$$

Die Ergebnisse der Drahtdickenbestimmung aus den in Tabelle 4 im Anhang gegebenen Werten sind im Folgenden zusammengefasst. Da es sich um unterschiedliche Messmethoden handelt und sich jeweils beide Ergebnisse für einen Draht in ihren Unsicherheiten überschneiden kann außerdem noch ein gewichtetes Mittel gebildet werden.

	Draht 1	Draht 2
Objektiv 1	$d_{11} = (30 \pm 10)\ \mu m$	$d_{12} = (81 \pm 10)\ \mu m$
Objektiv 2	$d_{21} = (32 \pm 3)\ \mu m$	$d_{22} = (77 \pm 4)\ \mu m$
Gew. Mittel	$\overline{d_1} = (32 \pm 3)\ \mu m$	$\overline{d_2} = (78 \pm 5)\ \mu m$

5 Berechnung der Auflösungsgrenzen

Im letzten Teil des Versuchs sollte die minimale Abstand zweier Punkte, die mit einem der beiden Objektive noch aufgelöst werden können, berechnet werden. Dabei gilt, falls nur die Winkelmessung selbst fehlerbehaftet ist:

$$d_i = \frac{\lambda}{n \cdot \sin\varphi_i} \tag{19}$$

$$u_{d_i} = \sqrt{\left(-\frac{\lambda\cos\varphi_i}{n\sin^2\varphi_i} \cdot u_{\varphi_i}\right)^2} \tag{20}$$

wobei d_i der gesuchte Abstand, $\lambda = 550\ nm$ eine vorgegebene Wellenlänge, $n \approx 1$ der Brechungsindex von Luft und φ_i der halbe Öffnungswinkel des Mikroskops mit dem Objektiv $i = 1, 2$ ist.

Der halbe Öffnungswinkel φ_i wurde wie im Skript beschrieben bestimmt. Um eine Asymmetrie der Versuchsanordnung auszuschließen, wurde der halbe Winkel einmal in positive und einmal in negative Richtung gemessen, was aber für beide Objekte in beide Richtungen den jeweils gleichen Messwert lieferte, weswegen hier nur mehr mit dem Wert in positiver Richtung gerechnet wird.

In den statistischen Fehler der Winkelmessung $e_{\varphi_i,z}$ gehen neben dem Ablesefehler von einem halben Skalenteil auch eine gewisse Unsicherheit für die präzise Bestimmung des Momentes, in dem das Licht an Intensität verliert, ein. Zusätzlich handelt es sich bei der verwendeten Glühlampe nicht um eine Punktquelle, aufgrund der Ausdehung der Lichtquelle folgt also eine weitere Unsicherheit für die Bestimmung des Winkels. Alles zusammen wurde auf einen statistischen Fehler von $e_{\varphi_i,z} = 1°$ abgeschätzt.

Der systematische Fehler $e_{\varphi_i,s}$ der Messskale war unbekannt und wurde mit dem eines Stahlmaßstabs abgeschätzt. Die Unsicherheit eines Stahlmaßstabes enthält einen absoluten Anteil von $0,05\ mm$, was bei Skalenteilen von $1\ mm$ einer Unsicherheit von 5% eines Skalenteils entspricht. Entsprechend folgt für die verwendete Winkelskala, eingeteilt in Skalenteile von einem Grad, ein absoluter Anteil von $0,05°$. Die zweite Komponente der Unsicherheit eines Stahlmaßstabes ist variabel mit der Länge als $L \cdot 10^{-5}$ angegeben und wird analog zu $\varphi_i \cdot 10^{-5}$. Der systematische Fehler lautet damit $e_{\varphi_i,s} = 0,05° + \varphi_i \cdot 10^{-5}$. Schließlich werden beide Fehler pythagoräisch addiert:

$$u_{\varphi_i} = \sqrt{e^2_{\varphi_i,s} + e^2_{\varphi_i,z}} \tag{21}$$

Nach einer Umwandlung der gemessenen Winkel und ihrer Fehler in Radiant folgt:

$$\varphi_1 = (0,54 \pm 0,02)\ rad$$
$$\varphi_2 = (0,28 \pm 0,02)\ rad$$

In die Formeln (19) und (20) eingesetzt lassen sich die minimal auflösbaren Abstände d_i für die beiden Objektive schließlich so angeben:

$$d_1 = (1,07 \pm 0,03)\ \mu m$$
$$d_2 = (2,00 \pm 0,12)\ \mu m$$

6 Fehleranalyse und kritische Ergebniseinschätzung

Beim Vergleich der hier bestimmten Vergrößerungsfaktoren mit den theoretischen Werten von $V = \beta_{Ob} \cdot V_{Ok}$ zeigt sich, dass die experimentellen Werte mit etwa 105% geringfügig größer sind als die jeweiligen V.

	M (Experiment)	V (Theoretisch)
A1	107 ± 5	100
A2	410 ± 30	400
B1	167 ± 8	160
B2	670 ± 47	640

Dies führt im Falle des kleinsten Wertes dazu, dass der theoretische Wert nicht mehr im Fehlerintervall des hier bestimmten liegt. Es ist also zu vermuten, dass es entweder noch mindestens eine unberücksichtigte systematische Fehlerquelle im Versuchsaufbau gibt, oder aber die vom Hersteller angegebenen Werte für die Vergrößerung von Okular und Objektiv selbst eine gewisse Toleranz haben. Insbesondere scheint es möglich, dass die auf den Instrumenten angegebene Vergrößerung nur ein garantiertes Minimum darstellt, die Instrumente also in Wirklichkeit aufgrund von Fertigungstoleranzen etwas leistungsfähiger sein können.

Bei der Bestimmung von M und auch bei der Eichung der Okularskale musste der systematische Fehler für die Objektskale abgeschätzt werden. Wie oben bereits erwähnt wurde die Unsicherheit dabei wissentlich zu groß abgeschätzt, da die Unsicherheit der Bügelmessschraube, die hier gewählt wurde, noch andere Fehlerquellen berücksichtigt, z.B. die Fertigungstoleranz für das Gewinde. Aufgrund der Fehlerfortpflanzung kann der systematische Fehler bei der Berechnung von M und Δ nicht vernachlässigt werden, bei einer erneuten Durchführung des Experiments sollte also der Teilungsfehler der Objektskale näher bestimmt werden um zu präziseren Aussagen über die Unsicherheit der Endergebnisse zu kommen.

Bei der Berechnung des Auflösungsvermögen ergibt ein Vergleich der experimentell bestimmten numerischen Aperturen mit den auf den Objektiven angegebenen Werten folgendes Bild:

	A_N (Experiment)	A_N (Hersteller)
Objektiv 1	$0,28 \pm 0,02$	0,25
Objektiv 2	$0,52 \pm 0,01$	0,65

Die experimentellen Werte weichen also erheblich von den theoretischen ab. Ein Grund dafür ist vermutlich die unterschiedliche Längen der Objektivgehäuse: Objektiv 2 war wesentlich länger als Objektiv 1. Bezogen auf das verwendete Winkelmaß kann also die Objektivlinse effektiv zu nah an der Lichtquelle liegen oder zu weit von ihr entfernt sein, d.h. entweder vor oder hinter dem reellen Mittelpunkt des Halbkreises liegen. Damit könnte sich erklären, warum die numerische Apertur im Vergleich zu den Herstellerangaben einmal zu klein und einmal zu groß ausfällt.

Literatur

[1] Müller, U. *Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik.* 2007.

[2] Müller, U. *Physikalisches Grundpraktikum. Elektrodynamik und Optik.* 2010.

A Anhang

Tabelle 2: Bestimmung der Vergrößerung

	B $[mm]$	$e_{B,z}$	$e_{B,s}$	u_B	g $[Skt]$	G $[mm]$	u_G	M	u_M
A1	48,0	2,0	1,0	2,2	9	0,45	0,01	107	5
A2	41,0	2,0	0,9	2,2	2	0,10	0,01	410	30
B1	50,0	2,0	1,0	2,3	6	0,30	0,01	167	8
B2	67,0	3,0	1,4	3,3	2	0,10	0,01	670	47

Tabelle 3: Eichung der Okularskale

	g $[Skt]$	G $[mm]$	u_G	l $[Skt]$	u_l	Δ $[\mu m]$	u_Δ
Objektiv 1	16	0,800	0,005	79	0,50	10,13	0,09
Objektiv 2	5	0,250	0,005	101	1,00	2,48	0,06

Tabelle 4: Berechnung der Drahtdicken

	l $[Skt]$	u_l	d $[\mu m]$	u_d
Objektiv 1 / Draht 1	3	1	30,4	10,1
Objektiv 1 / Draht 2	8	1	81,0	10,2
Objektiv 2 / Draht 1	13	1	32,2	2,6

Objektiv 2 / Draht 2	
l $[Skt]$: 32,0, 31,0, 31,0, 30,0, 32,0, 31,0	
d $[\mu m]$: 79,2, 76,7, 76,7, 74,3, 79,2, 76,7	
Mittelwert	77,1
Vertrauensbereich	0,8
Syst. Restfehler	4,3
Gesamtfehler	4,3

Tabelle 5: Bestimmung der Auflösungsgrenze

	φ $[°]$	$e_{\varphi,z}$	$e_{\varphi,s}$	u_φ	φ $[rad]$	u_φ	d $[\mu m]$	u_d
Objektiv 1	16	1,00	0,05	1,00	0,28	0,02	2,00	0,12
Objektiv 2	31	1,00	0,05	1,00	0,54	0,02	1,07	0,03